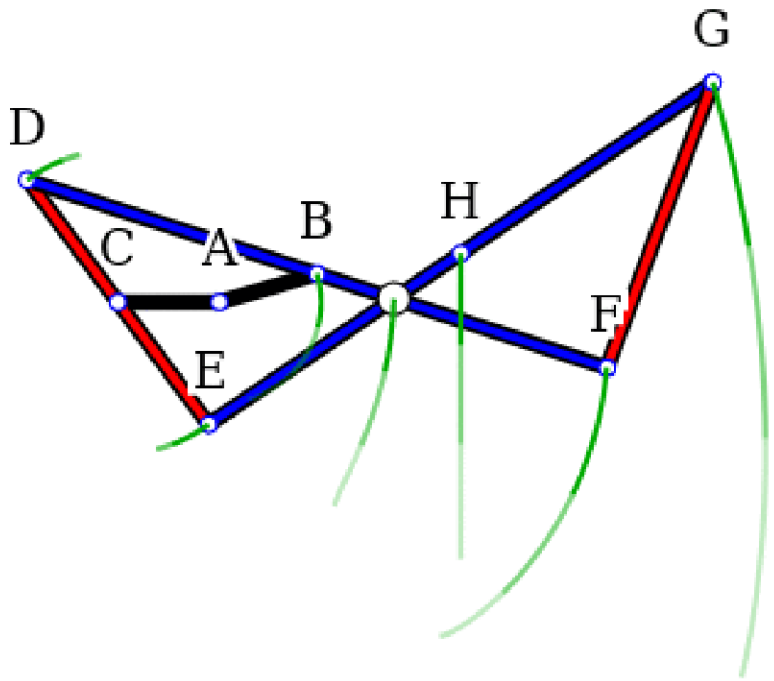
PITAGORAS
ACADEMIA

# GEOMETRÍA

**Profesor:**
**Marco Almerco**

# TRIÁNGULOS




# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

# DEFINICIÓN

# CASOS

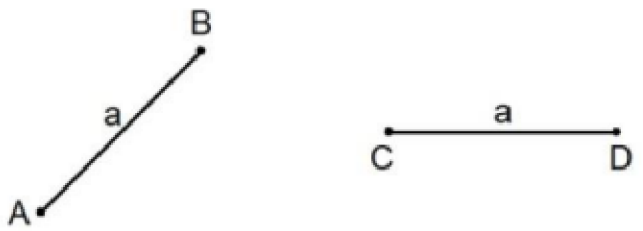
# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS NOTABLES

# FIGURAS CONGRUENTES

## Concepto

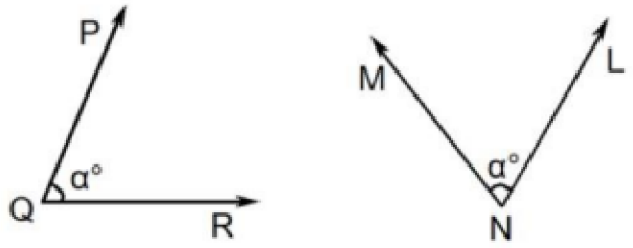
Se denomina así a figuras que tienen la misma forma y el mismo tamaño.

En la figura siguiente se muestran dos segmentos congruentes y también dos ángulos congruentes, en este caso sus medidas serán iguales.




Ahora escribimos:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{o} \quad AB = CD$$




También:

$$\angle PQR \cong \angle MNL \quad \text{o} \quad m\angle PQR = m\angle MNL$$

$\cong$ : se lee "es congruente con"

En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

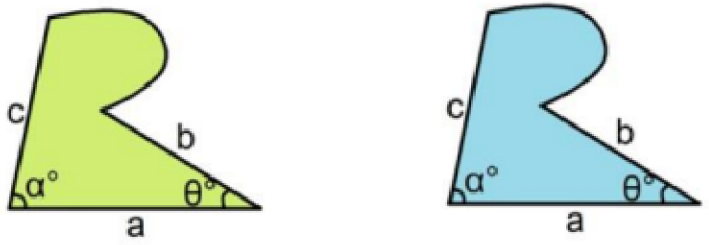


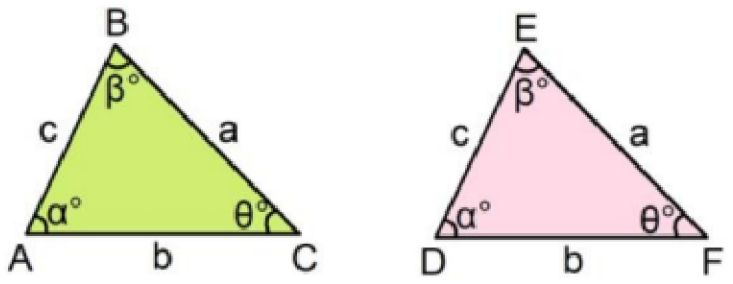

Figura 1 Figura 2

Figura 1 $\cong$ Figura 2

# DEFINICIONES

## CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes.




Para indicar que el "triángulo ABC es congruente al triángulo DEF", se escribe:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Esta sola expresión nos dice a la vez seis cosas, a saber:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ o $AB = DE$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ o $BC = EF$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ o $AC = DF$

$\angle A \cong \angle D$ o $m\angle A = m\angle D$

$\angle B \cong \angle E$ o $m\angle B = m\angle E$

$\angle C \cong \angle F$ o $m\angle C = m\angle F$

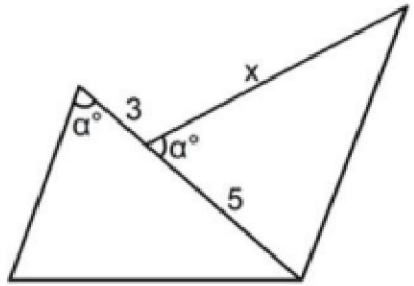
En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

En dos triángulos congruentes, a lados congruentes se le oponen ángulos congruentes y recíprocamente, a ángulos congruentes se le oponen lados congruentes.

# DEFINICIONES

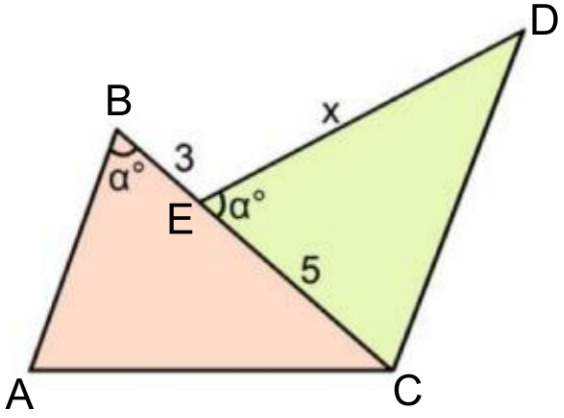
**Ejemplo**

Los triángulos mostrados son congruentes, calcular el valor de x.




Resolución:

Por dato tenemos que los triángulos mostrados son congruentes, esto significa que los triángulos tienen sus lados congruentes y sus ángulos congruentes, bastará con identificar, a partir del gráfico, que lados son congruentes.



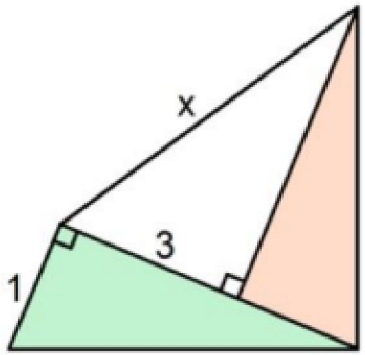

En el triángulo ABC uno de los lados adyacentes al ángulo que mide α mide 8, luego en el triángulo CED uno de los lados adyacentes al ángulo que mide α también deberá medir 8, pero uno de los lados ya mide 5, entonces se concluye que el otro deberá medir 8.

$$\therefore x = 8$$

# DEFINICIONES

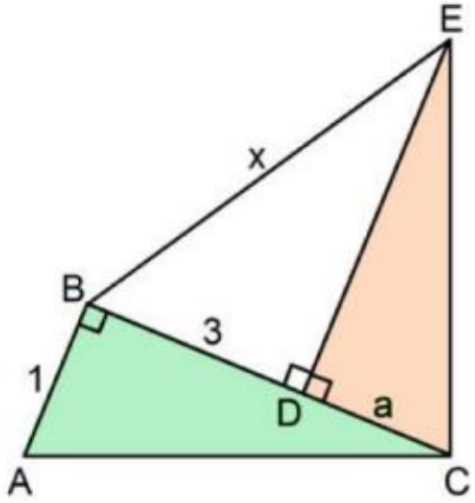
**Ejemplo**

Los triángulos cuyo interior están sombreados son congruentes, calcular el valor de x.

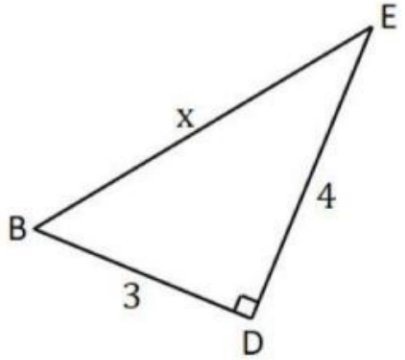



Resolución:

Observemos que los triángulos señalados son congruentes, es decir debemos identificar que lados son congruentes.




En el triángulo ABC los catetos miden 1 y (3+a), entonces en el triángulo CDE sus catetos deben medir también 1 y (3+a), entonces el cateto DC, que mide a, no puede medir (3+a) entonces se concluye que a=1. Luego el cateto DE deberá medir 3+a=4. Finalmente en el triángulo BDE:




$\therefore x = 5$

# CASOS DE CONGRUENCIA

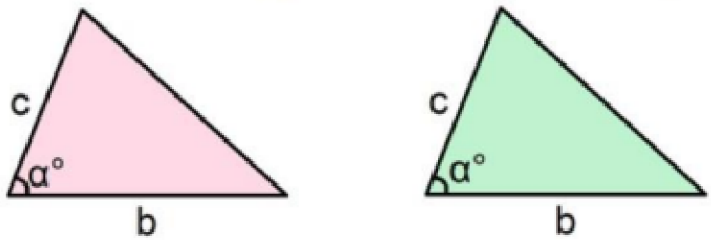
## CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

En general dos figuras congruentes tienen todos sus elementos correspondientes de igual medida.

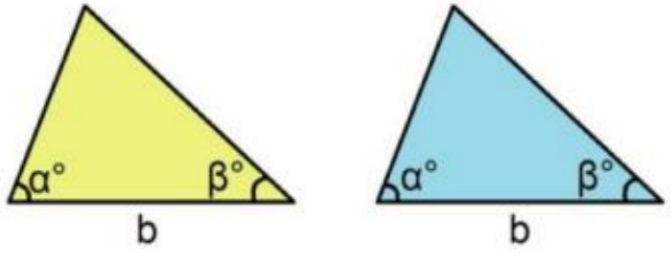
Para que dos triángulos sean congruentes, no necesariamente los seis pares de elementos correspondientes deben de ser congruentes, sino simplemente tres pares de ellos, entre los que por lo menos debe figurar un par de lados correspondientes, esto implica la congruencia de los restantes.

De acuerdo con la naturaleza de los elementos congruentes, resultan los siguientes casos de congruencia de triángulos:

Primer caso.- Dos triángulos serán congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes (Caso LAL).

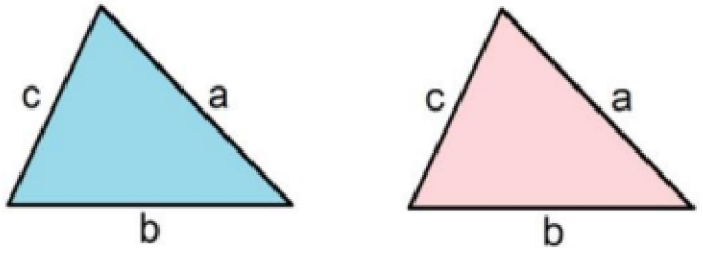



Segundo caso.- Dos triángulos serán congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente congruentes (Caso ALA).

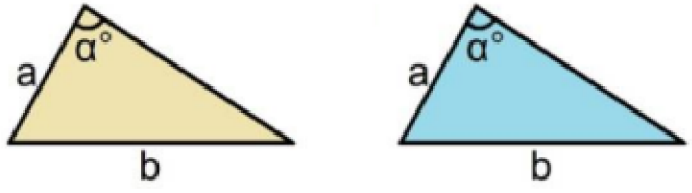


# CASOS DE CONGRUENCIA

Tercer caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes (Caso LLL).




Cuarto caso.- Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados respectivamente congruentes (Caso LLA).




b>a

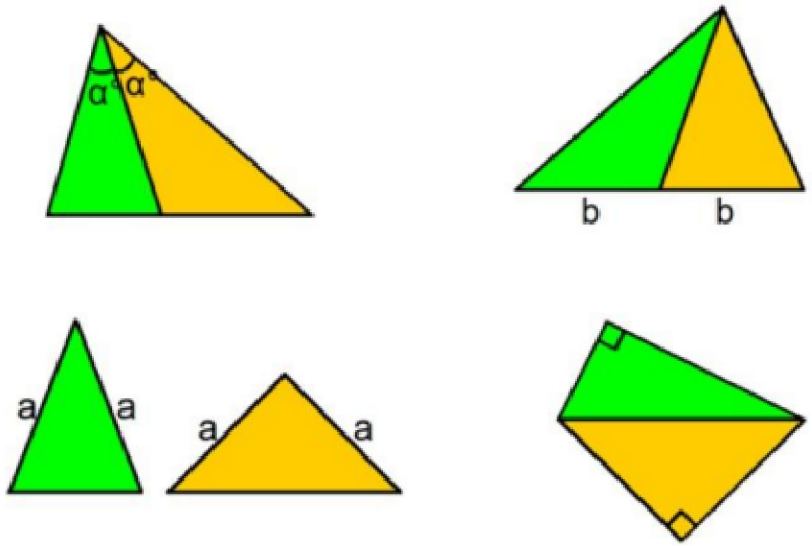
## OBSERVACIONES

- Un problema se resuelve usando los criterios de congruencia de triángulos cuando en él se dan elementos (lados y ángulos) congruentes, es decir; si un problema tiene como datos lados congruentes y ángulos congruentes, es muy probable que se aplique la teoría de congruencia, busque los triángulos congruentes o haga algún trazo que genere triángulos congruentes.

- Es imposible encontrar triángulos congruentes sin tener lados congruentes, dos triángulos pueden tener los mismos ángulos y no ser congruentes.

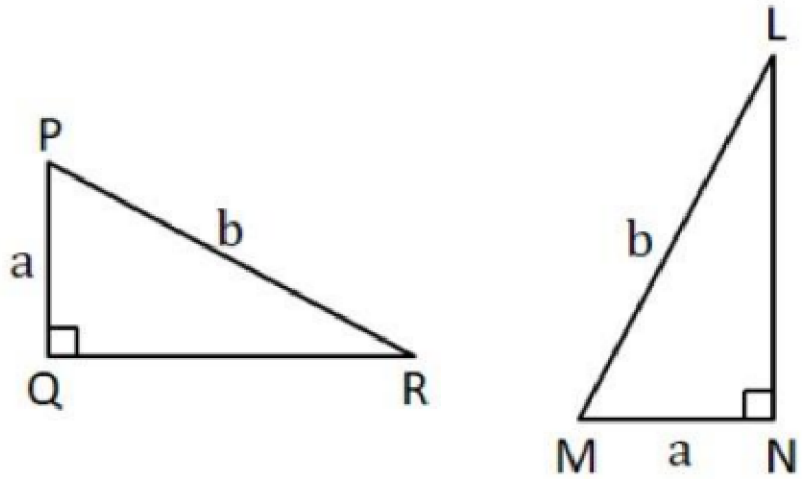
# CASOS DE CONGRUENCIA

- Para que dos triángulos sean congruentes se necesita que tengan tres elementos respectivamente congruentes (L-A-L; A-L-A o L-L-L), dos elementos congruentes no son suficientes, para ilustrar esta idea se muestra a continuación varias parejas de triángulos que, aún cuando tienen elementos congruentes, no son congruentes, le sugerimos analizar cada caso y comprobar que, en efecto, no hay congruencia.




**NOTA**

Caso Hipotenusa-Cateto (H-C)



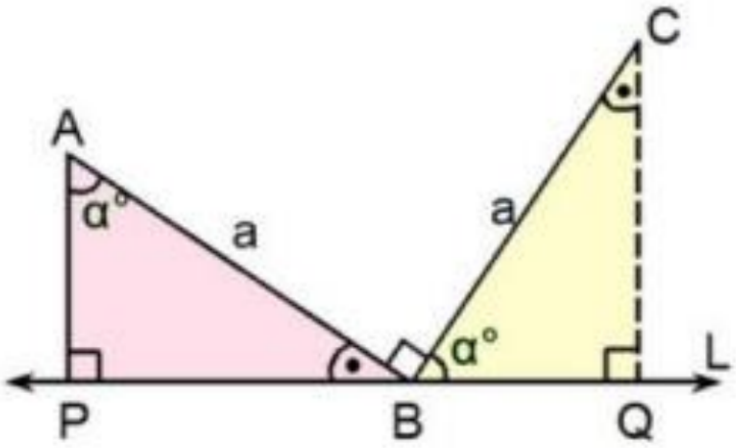

$$\Delta PQR \cong \Delta MNL$$

# CASOS DE CONGRUENCIA

## ANOTACIONES FINALES

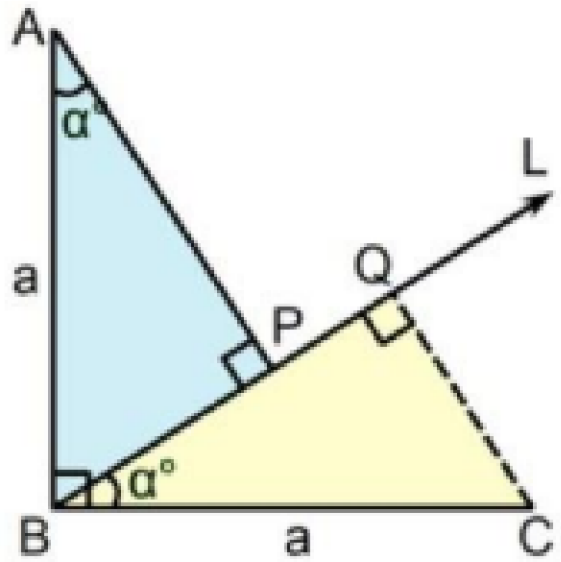
01. Si dos segmentos consecutivos son congruentes y perpendiculares, entonces se recomienda formar triángulos rectángulos congruentes.

a) En la figura al trazar $\overline{CQ} \perp \overleftrightarrow{L}$, se obtiene:




$$\Delta APB \cong \Delta BQC$$
$$(A - L - A)$$

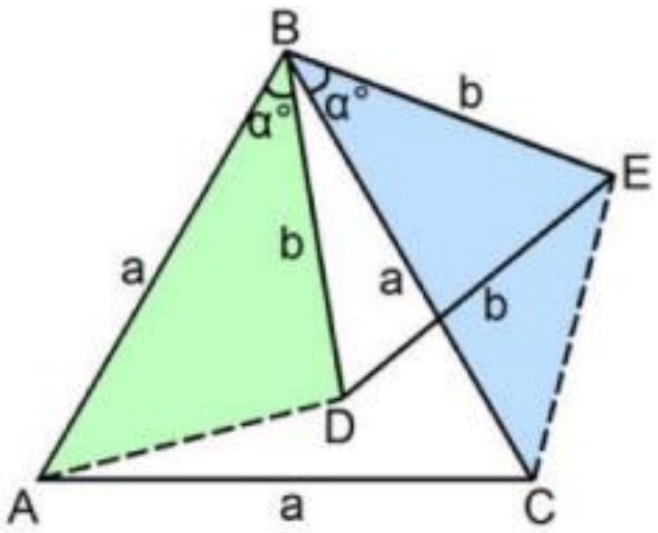
b) En la figura al trazar $\overline{CQ} \perp \overleftrightarrow{L}$, se obtiene:



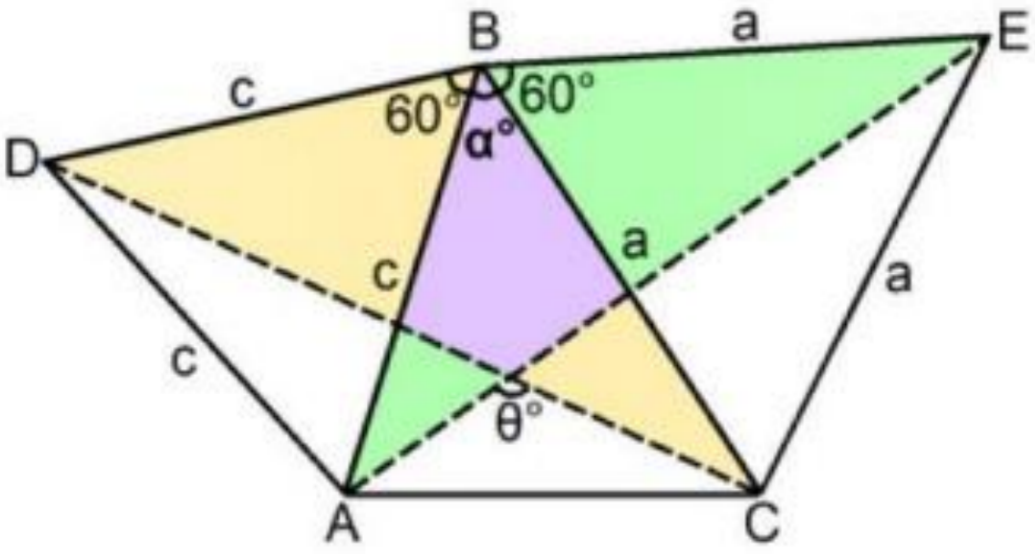

$$\Delta APB \cong \Delta BQC$$
$$(A - L - A)$$

# CASOS DE CONGRUENCIA

02. Si dos triángulos equiláteros tienen un vértice común, resulta una configuración conocida que permite establecer la congruencia de dos triángulos. Por ejemplo en las dos figuras mostradas a continuación la congruencia se debe al caso (L-A-L).




$$\Delta ABD \cong \Delta CBE$$
$$(L - A - L)$$



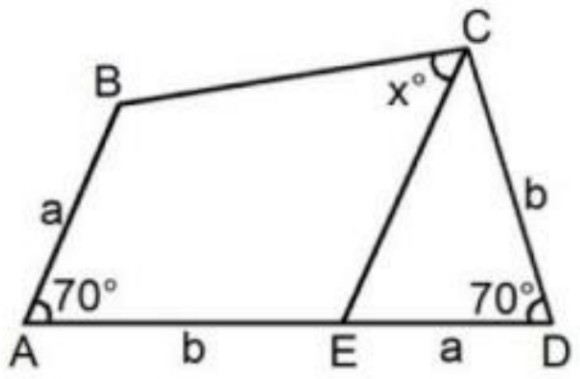

$$\Delta ABE \cong \Delta DBC$$
$$(L - A - L)$$

En la figura: $\theta = 120$

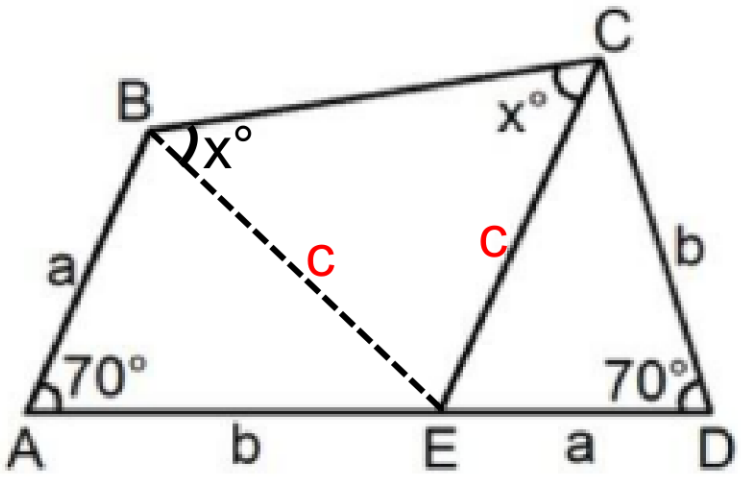
# CASOS DE CONGRUENCIA

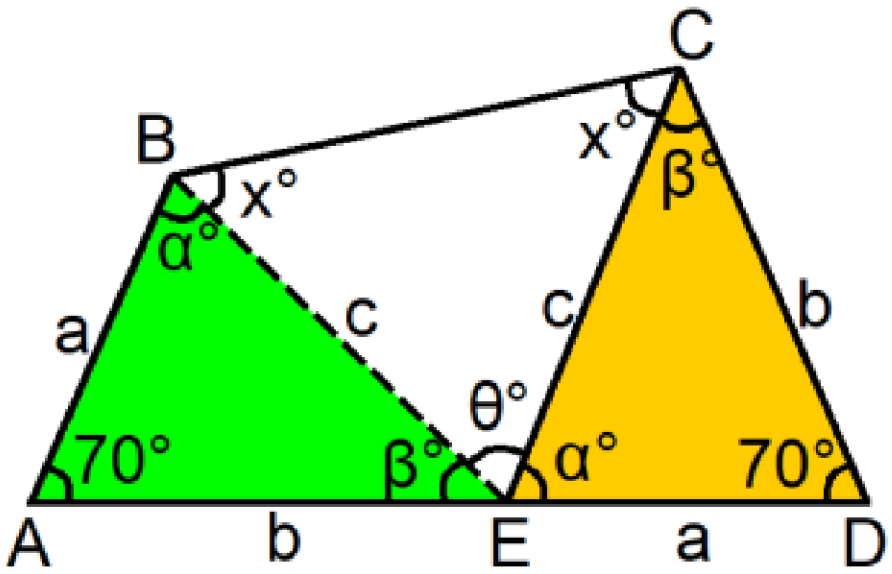
Ejemplo

Del gráfico mostrado calcule el valor de x.




## Resolución:




Trazamos $\overline{BE}$ y observamos que: $\Delta BAE \cong \Delta\ EDC$

**( Caso LAL).**

Indicamos los elementos congruentes ordenadamente.

$\measuredangle ABE \cong \measuredangle DEC$ ; $\measuredangle BEA \cong \measuredangle ECD$ y $\overline{BE} \cong \overline{EC}$

Notamos que $\alpha+\beta=110$ En "E" $\rightarrow$ $m\measuredangle BEC = 70$

Por último el $\Delta BEC$ es isósceles, de donde:

$$x + x + 70 = 180$$

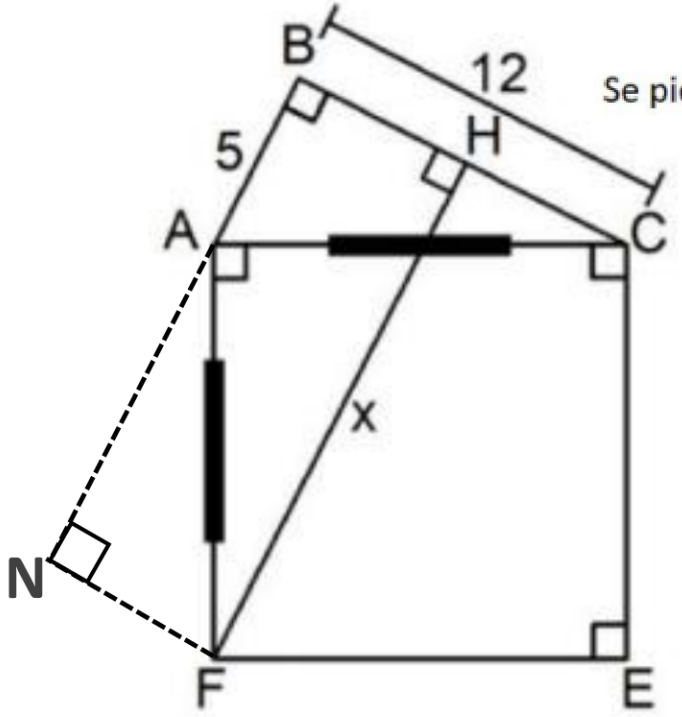
$$\therefore x = 55$$

# CASOS DE CONGRUENCIA

## Ejemplo

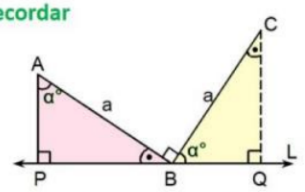
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se construye exteriormente el cuadrado ACEF. Si los catetos miden 5 y 12, calcular la distancia de F al cateto $\overline{BC}$.

## Resolución:



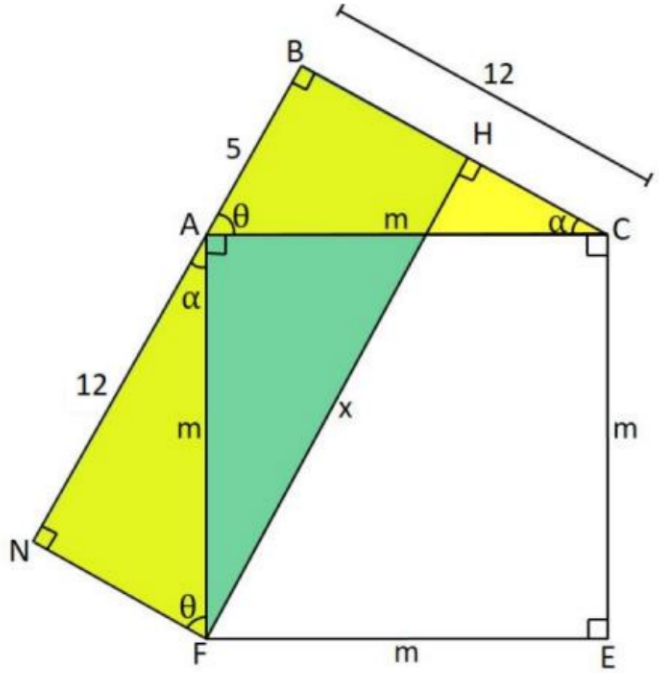

Se pide FH = x (Distancia de F a $\overline{BC}$)

**Recordar**




$\Delta APB \cong \Delta BQC$

$(A - L - A)$




Trazamos $\overline{FN} \perp \overline{AB}$ ( N en la prolongación de $\overline{BA}$ ).

Completando ángulos se tiene:

$\Delta ABC \cong \Delta FNA$ **( A-L-A)**

Entonces: BC = 12 = NA

Por último en el rectángulo FNBH los lados opuestos son congruentes:

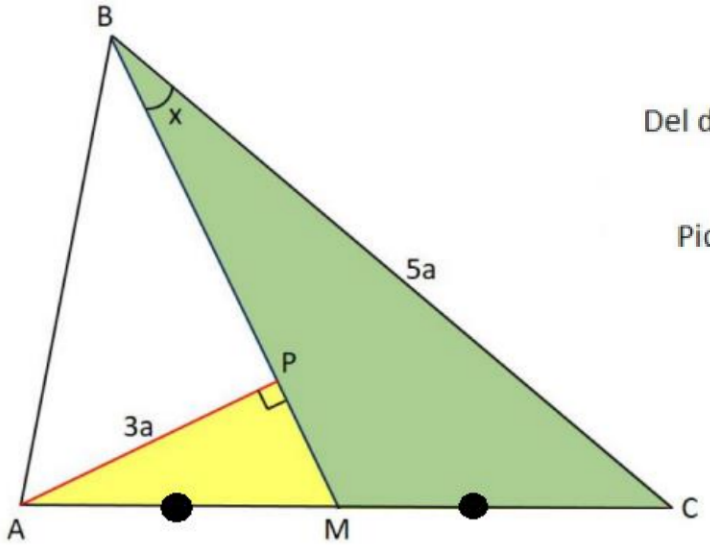
$\therefore$ x = 17

# CASOS DE CONGRUENCIA

## Ejemplo

En el triángulo ABC se traza $\overline{AP}$ perpendicular a la mediana $\overline{BM}$ (P en $\overline{BM}$), tal que 3(BC)=5(AP). Calcular m∠MBC

## Resolución:



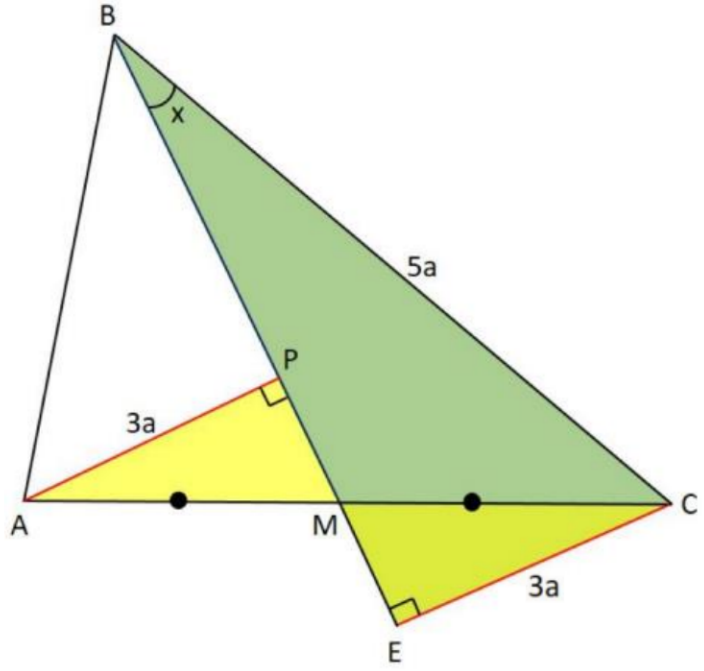

Del dato: 3(BC)=5(AP).

Piden m∠MBC= x

Se prolonga $\overline{BM}$ y se traza desde C una perpendicular a dicha prolongación: $\overline{CE} \perp \overline{BM}$

Notamos que: ⊿APM ≅ ⊿CEM (caso A-L-A)

→ AP = EC = 3a



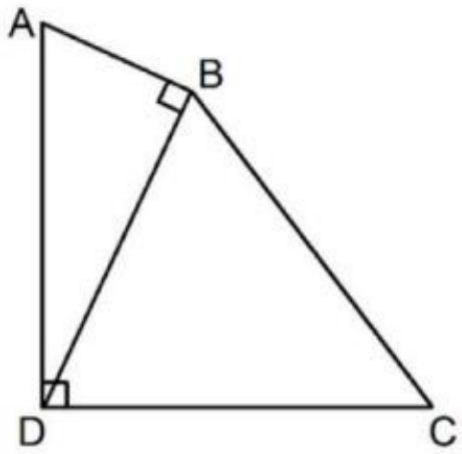

Por último ⊿BEC Notable( 37;53)

∴ x = 37

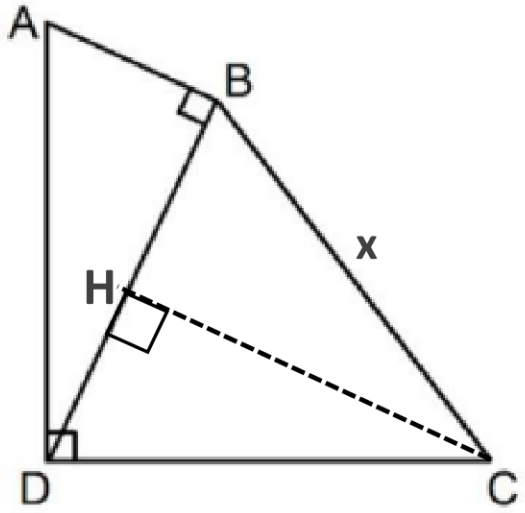
# CASOS DE CONGRUENCIA

## Ejemplo

Calcular BC, si AD=DC, AB=1 y BD=4.

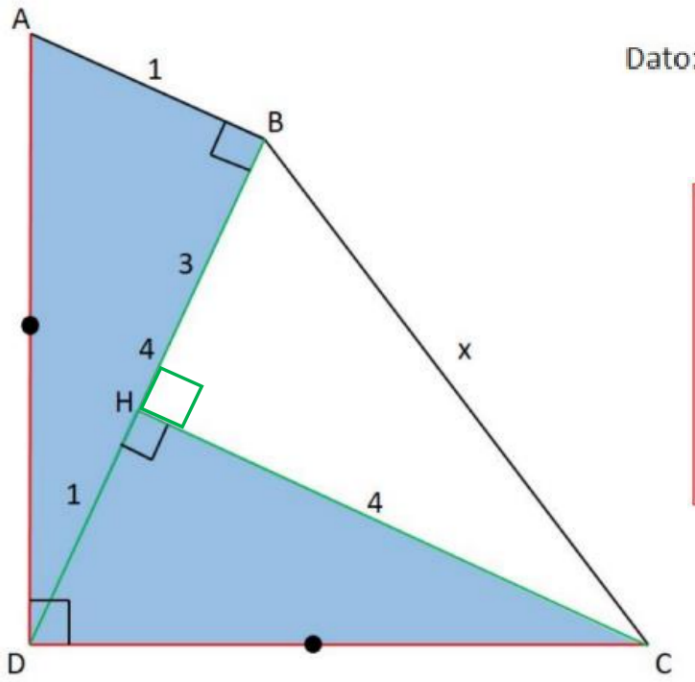



## Resolución:



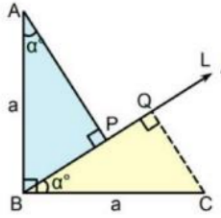

Piden BC = x

Se traza $\overline{CH}$ tal que $\overline{CH} \perp \overline{DB}$




Dato: AD = DC ; AB = 1 y DB = 4

**Recordar**




$\Delta APB \cong \Delta BQC$

$(A - L - A)$

Notamos que: $\triangle ABD \cong \triangle CHD$ (caso A-L-A)

→ AB = DH = 1 y DB = HC = 4

Luego si HB = DB - DH

→ HB = 3

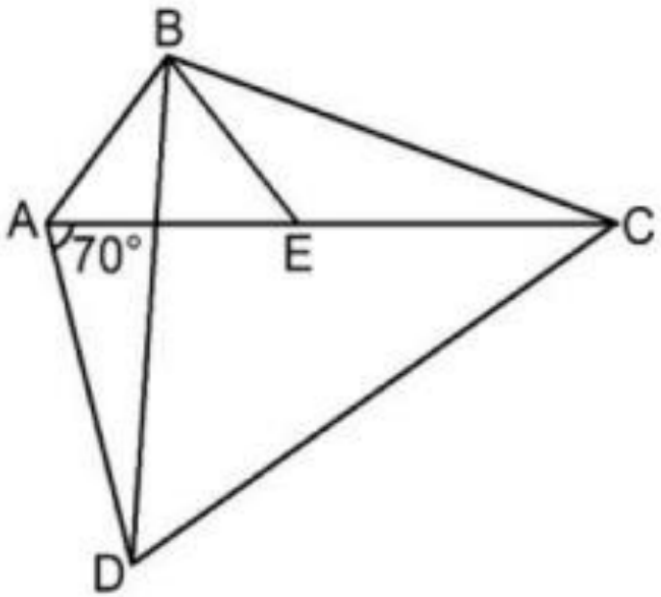
Por T. de Pitágoras en $\triangle BHC$:

$\therefore x = 5$

# CASOS DE CONGRUENCIA

Ejemplo

Calcular m∠ABE, si AB=BE, AD=EC y m∠BDC=m∠BCD.

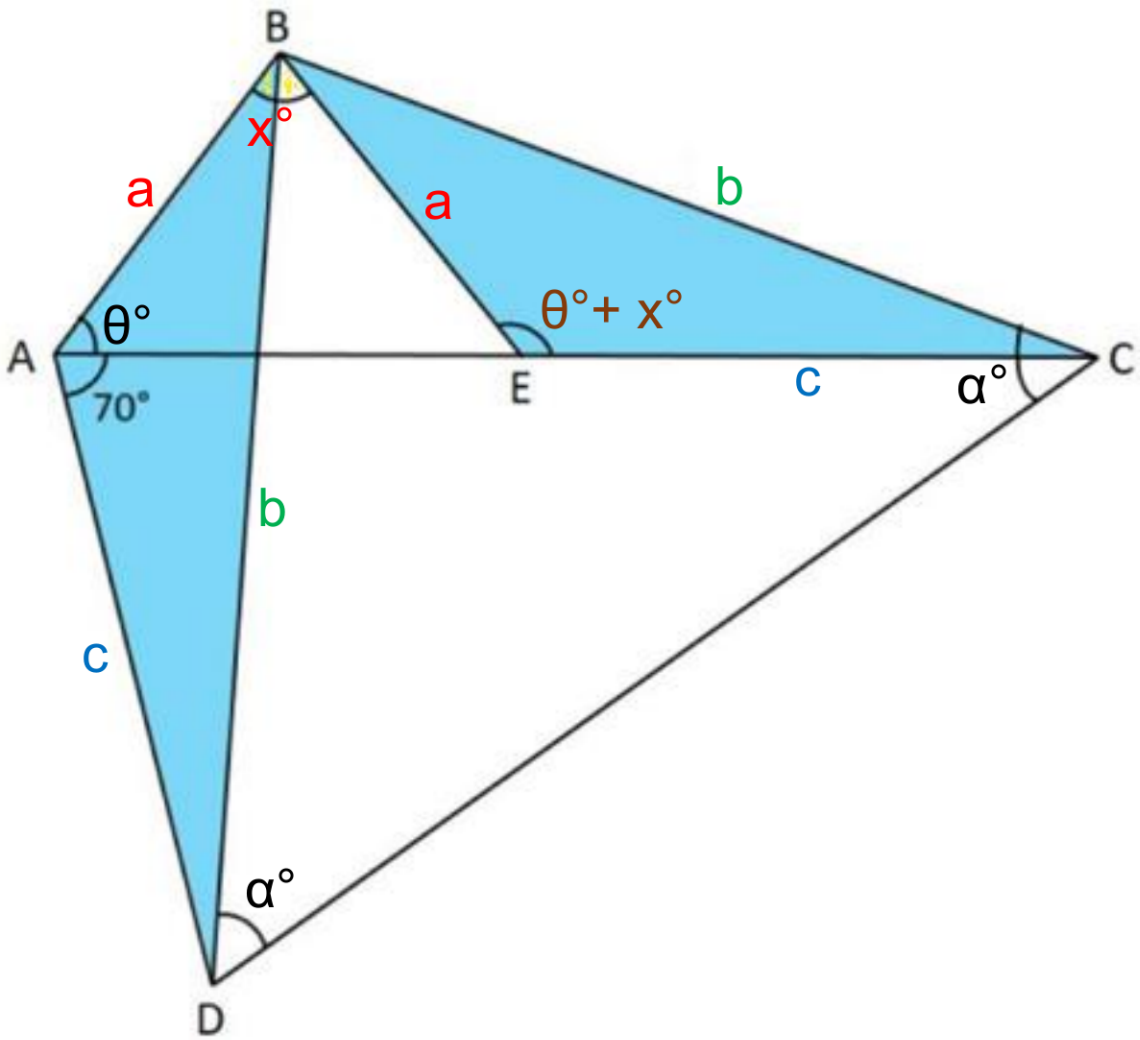



Resolución:

Piden: m∠ABE = x

Datos: AB=BE, AD=EC y m∠BDC=m∠BCD.

Sea: m∠BAE: θ




Notamos que ΔBAD ≅ ΔBEC (caso L-L-L)

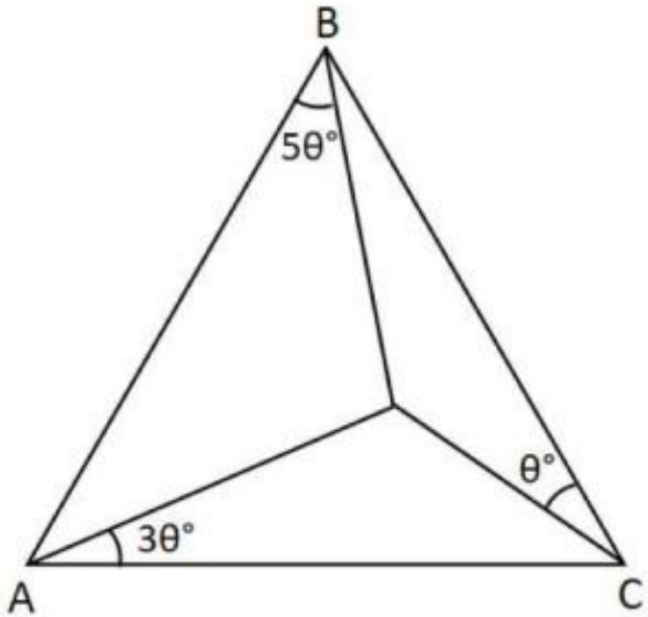
→ m∠BAE = m∠BEC

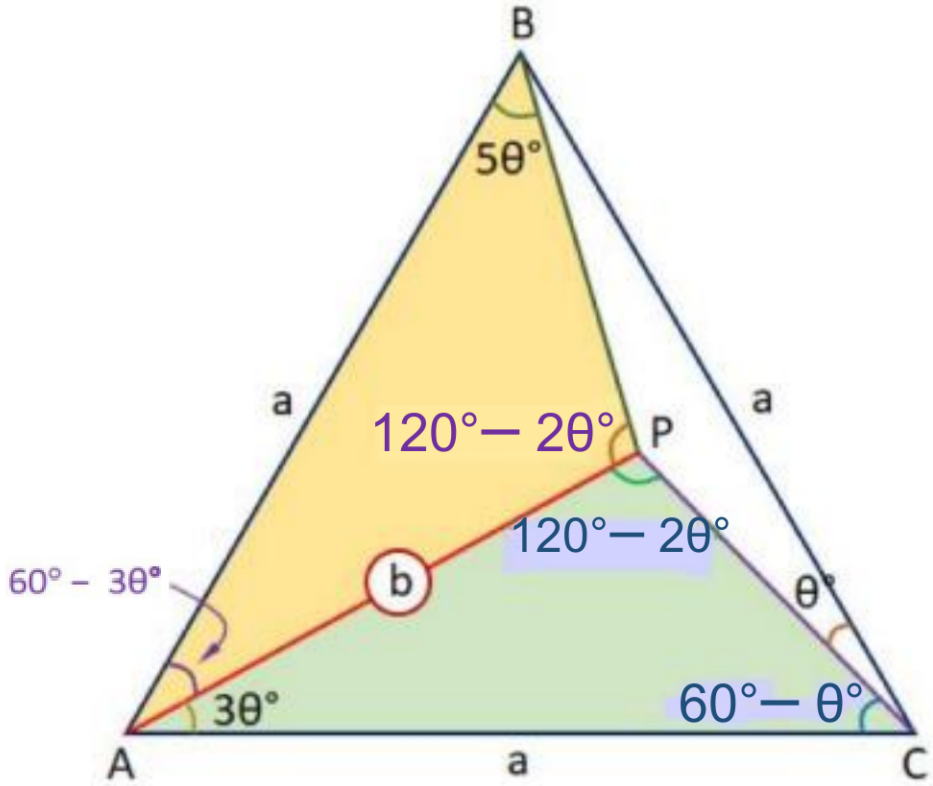
∴ x = 70

# CASOS DE CONGRUENCIA

Ejemplo

El triángulo ABC de la figura es equilátero. Calcular θ.




Resolución:

Se observa: a>b

Luego: $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (L.L.A)

$\Rightarrow 5\theta = 60 - \theta$

$6\theta = 60$

$\therefore \theta = 10$

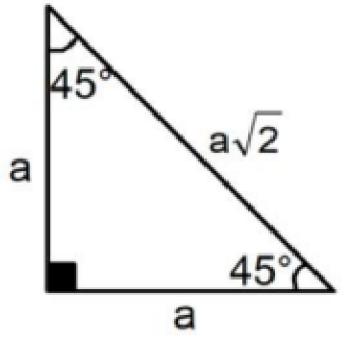
# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Son un grupo de triángulos en los cuales es conocida la razón que existe entre los lados (catetos e hipotenusa) y además se sabe cuanto miden sus ángulos.

A continuación presentamos algunos de ellos. Se ha seleccionado aquellos que son de gran utilidad, no solo en este curso, sino también en física y trigonometría.

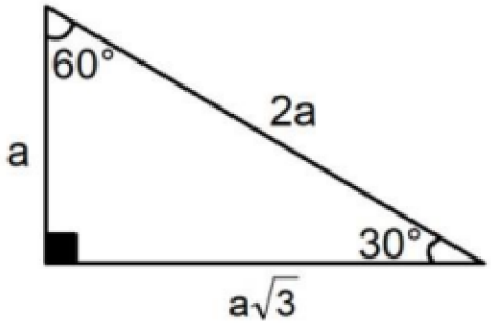
## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 45 Y 45

En este triángulo se cumple que los catetos son congruentes, además la hipotenusa tiene una medida igual a la del cateto multiplicada por $\sqrt{2}$.




## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 30 Y 60

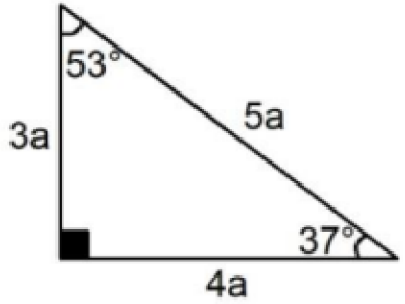
En este triángulo el lado menor (cateto opuesto a 30°) es igual a la mitad del lado mayor (hipotenusa). Además la medida del cateto opuesto a 60° es igual al lado menor multiplicado por $\sqrt{3}$.



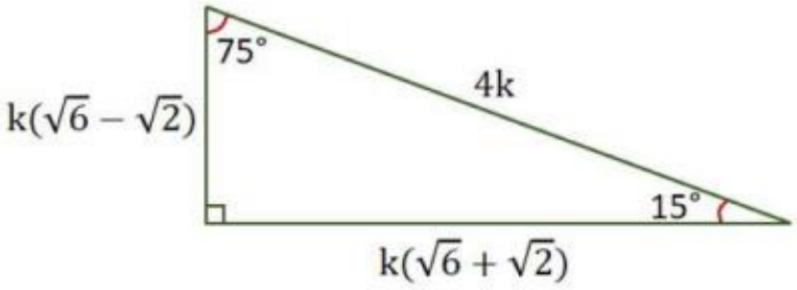
# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

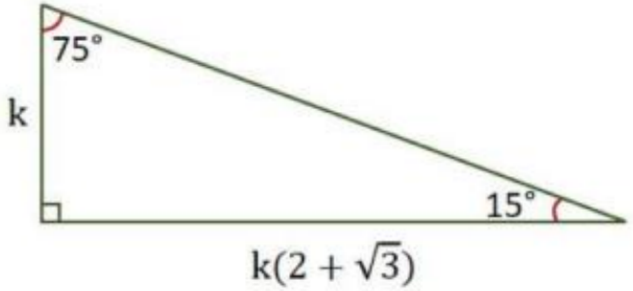
## TRIÁNGULO RECTÁNGULO APROXIMADO DE 37 Y 53

Si las medidas de los lados de un triángulo son proporcionales a los números 3; 4 y 5 entonces se cumple que el triángulo es rectángulo y sus ángulo agudos miden aproximadamente 37° y 53°.



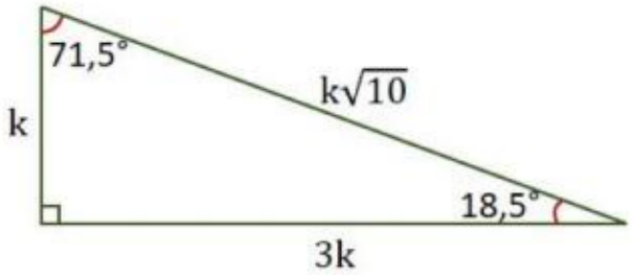

## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 15 Y 75



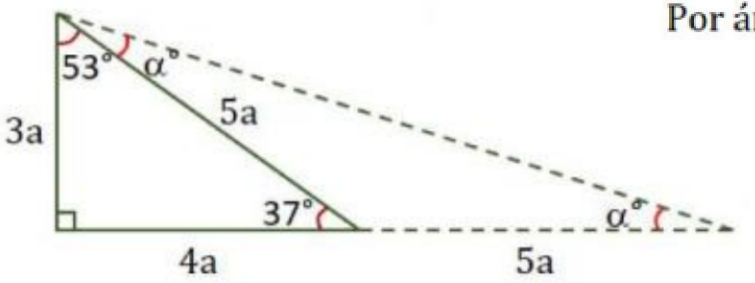



# TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 18,5 Y 71,5




## DEMOSTRACIÓN:

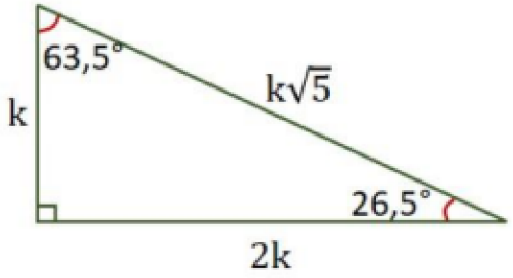



Por ángulo exterior:

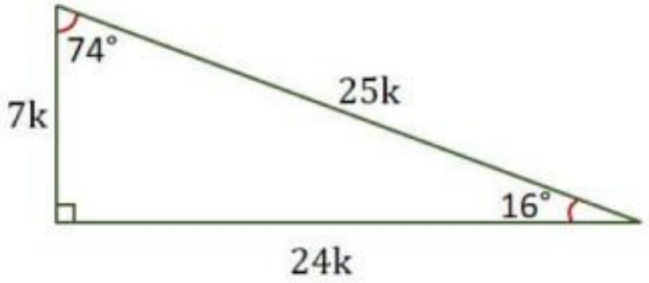
$$\alpha + \alpha = 37$$

$$\therefore \alpha = \frac{37}{2}$$

## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 26,5 Y 63,5




## TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 16 Y 74



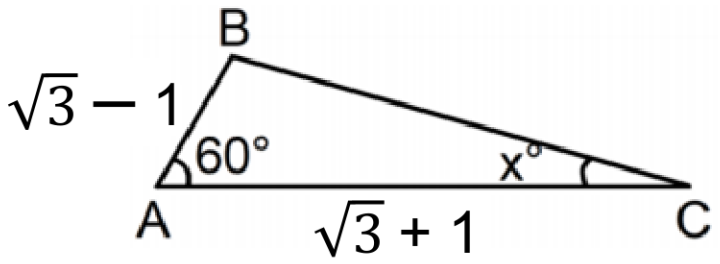
# EJERCICIOS

**EJEMPLO:**

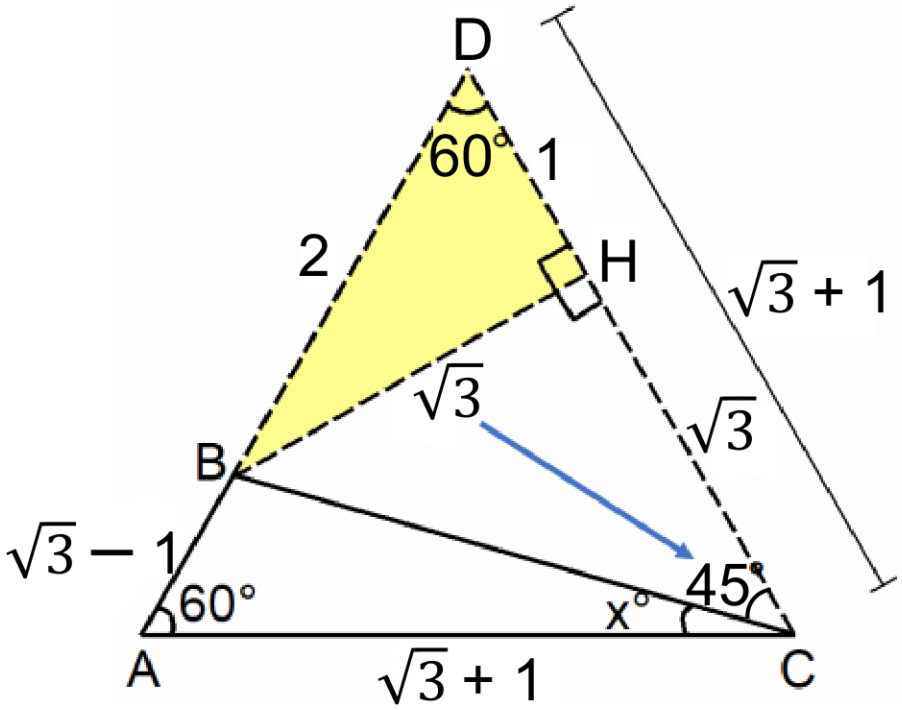
En un triángulo ABC: m∠A=60, AB=$\sqrt{3}-1$ y AC=$\sqrt{3}+1$.Calcular m∠C.

A) 30 B) 45 C) 22,5
D) 15 E) 60

Resolución:




- Formamos el triángulo equilátero ADC



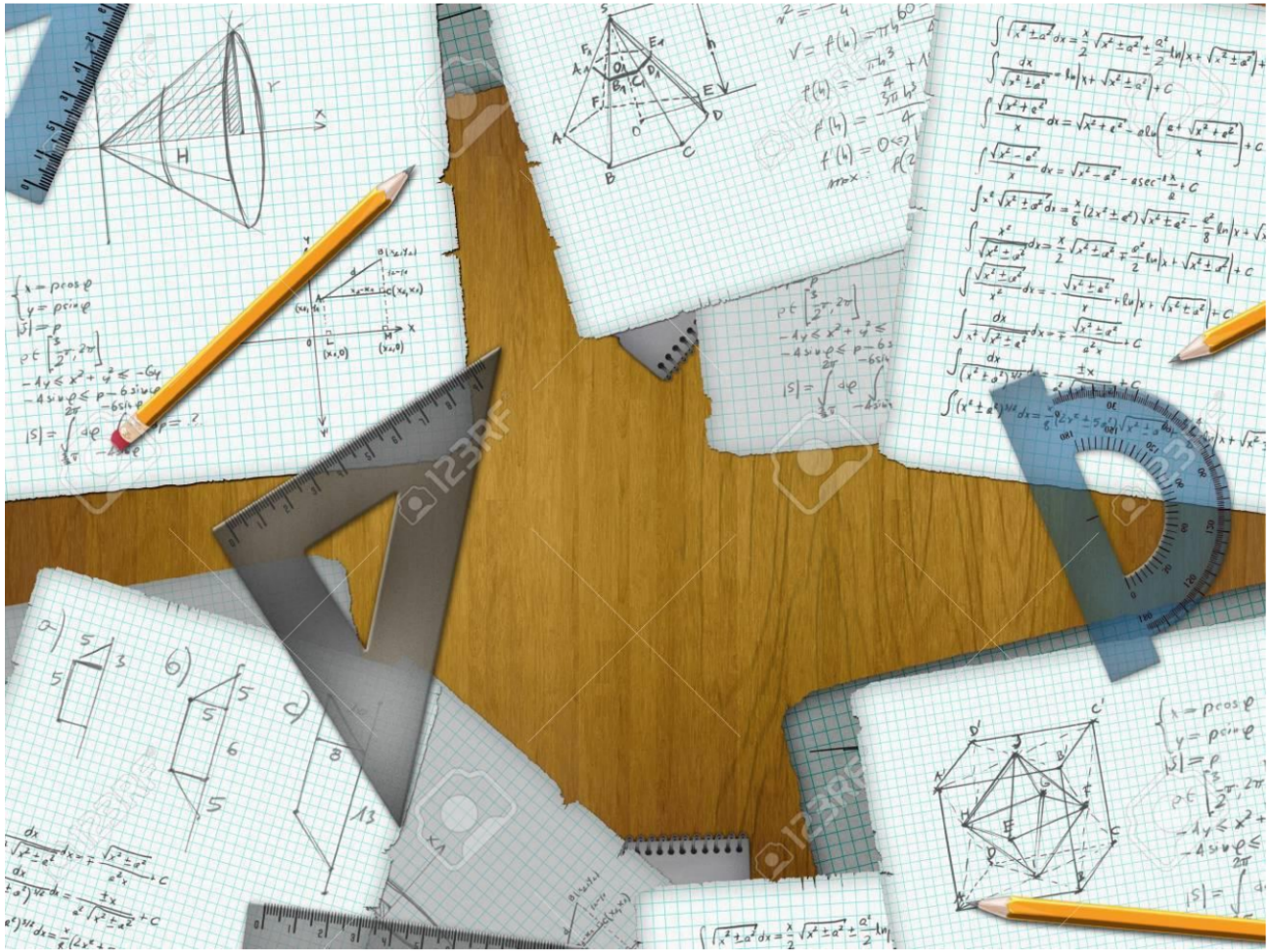

$\Rightarrow$ m∠C = 60

x + 45 = 60

$\therefore$ x = 15

# CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

## MOMENTO DE PRACTICAR



## PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

# EJERCICIOS

01. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sean A y B dos puntos distintos de una recta L, entonces:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \in L / A-X-B\}$$

II. Sean los puntos A, B y C, entonces:

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

III. Si $\Delta ABC \cong \Delta CAB$, entonces el triángulo ABC es equilátero.

A) VFF
B) FFV
C) VVV
D) FVF
E) VFV

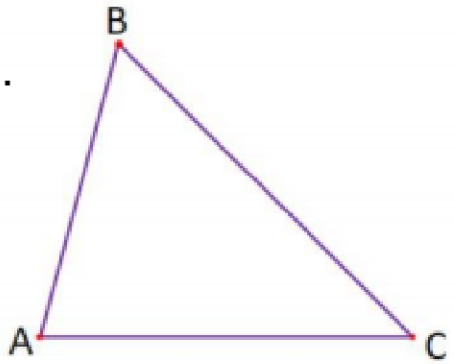
Resolución:

I. La siguiente expresión $A - B - C$, significa:

a) Los puntos A, B y C son colineales, y

b) B está entre A y C.

II.




**Notación:**

Triángulo ABC: $\Delta ABC$

$$\boxed{\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} / B \notin \overleftrightarrow{AC}}$$

III. Si: $\triangle ABC \cong \triangle CAB$

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C$

$\Rightarrow m\angle B = m\angle A$

$\Rightarrow m\angle C = m\angle B$

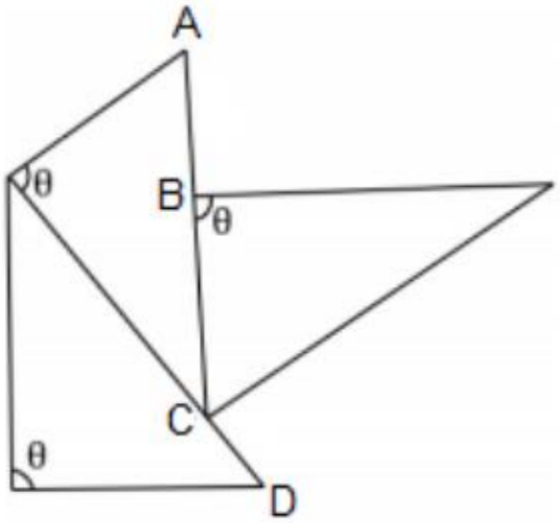
$\Rightarrow m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60$

$\therefore \triangle ABC$: Equilátero

Respuesta: VFV

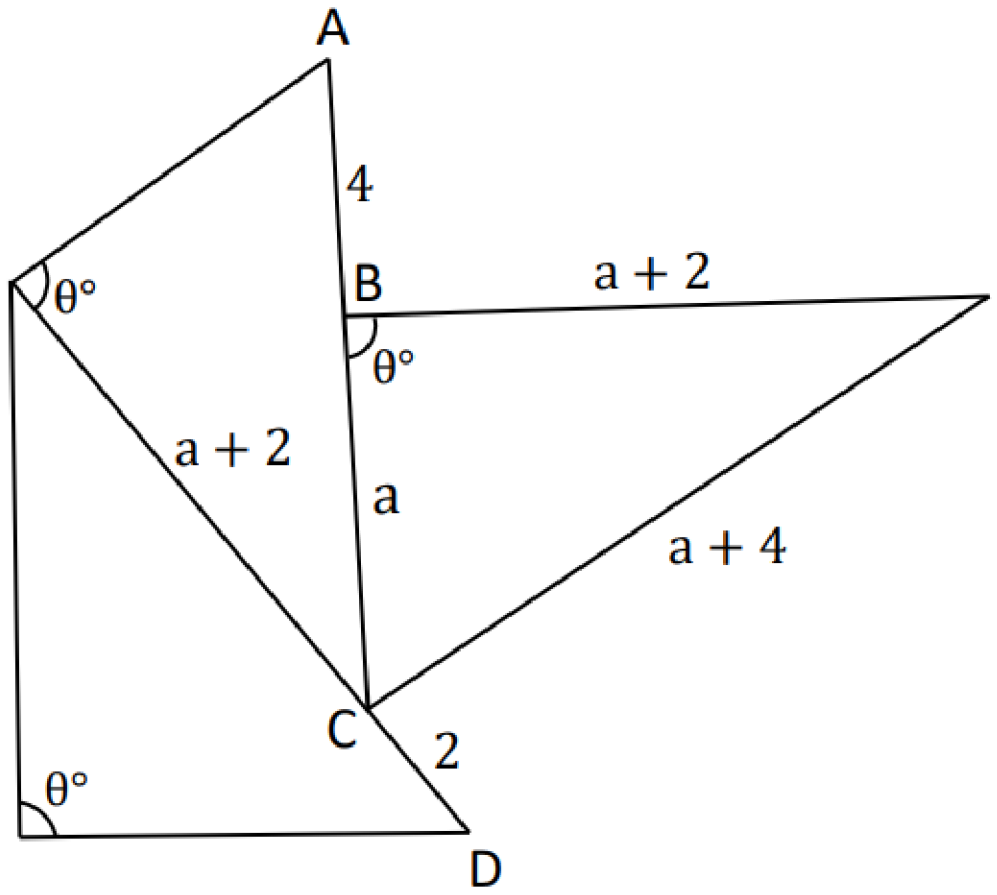
# EJERCICIOS

02. La figura muestra tres triángulos congruentes de perímetro 24 cm. Si AB=4 cm y CD=2 cm, halle la longitud del menor lado de un triángulo.




A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 6,5

Resolución:




Sea BC = a

De las figuras congruentes :

El perímetro:

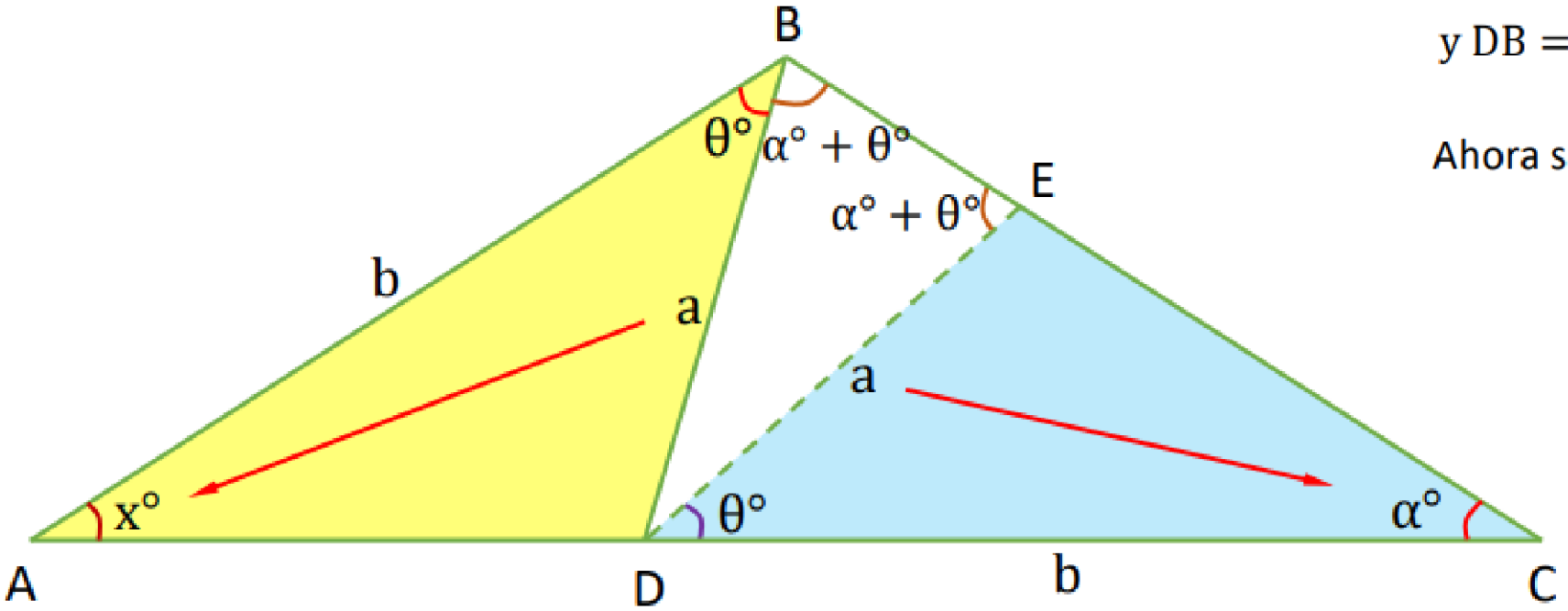
$a + \ + a + 2 + a + 4 = 24$ $\therefore a = 6$

# EJERCICIOS

03. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que m∠ABD=θ, m∠ACB=α, m∠DBC=α+θ y AB=CD. Calcule m∠BAC.

A) α
B) 2α
C) θ
D) 2θ
E) α/2

Resolución:




Dato: $AB = CD = b$

Se pide: $m\angle A = x$

Se traza $\overline{DE}$ tal que:

$$m\angle CDE = \theta$$

Luego:

$m\angle DEB = \alpha + \theta$ (Por ángulo exterior)

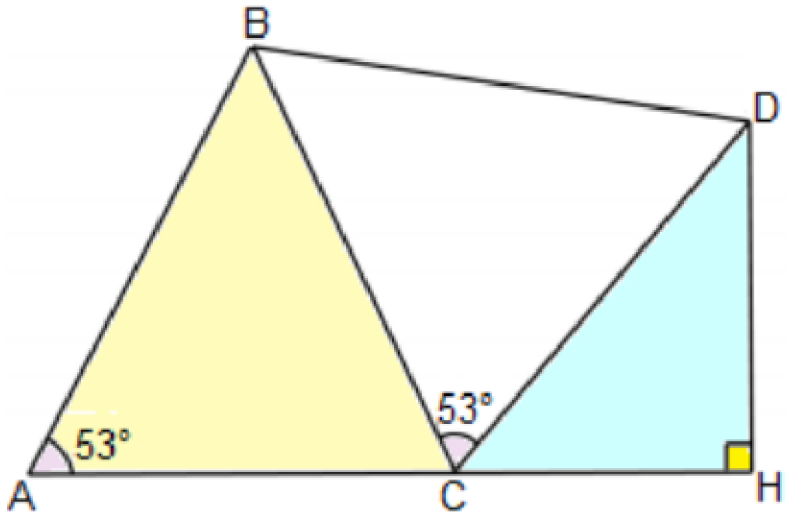
y $DB = DE = a$

Ahora se observa:

$\Delta ABD \cong \Delta CDE$ $(L - A - L)$

$\therefore x = \alpha$

04. En la figura BC=CD y AC=30, calcular DH.



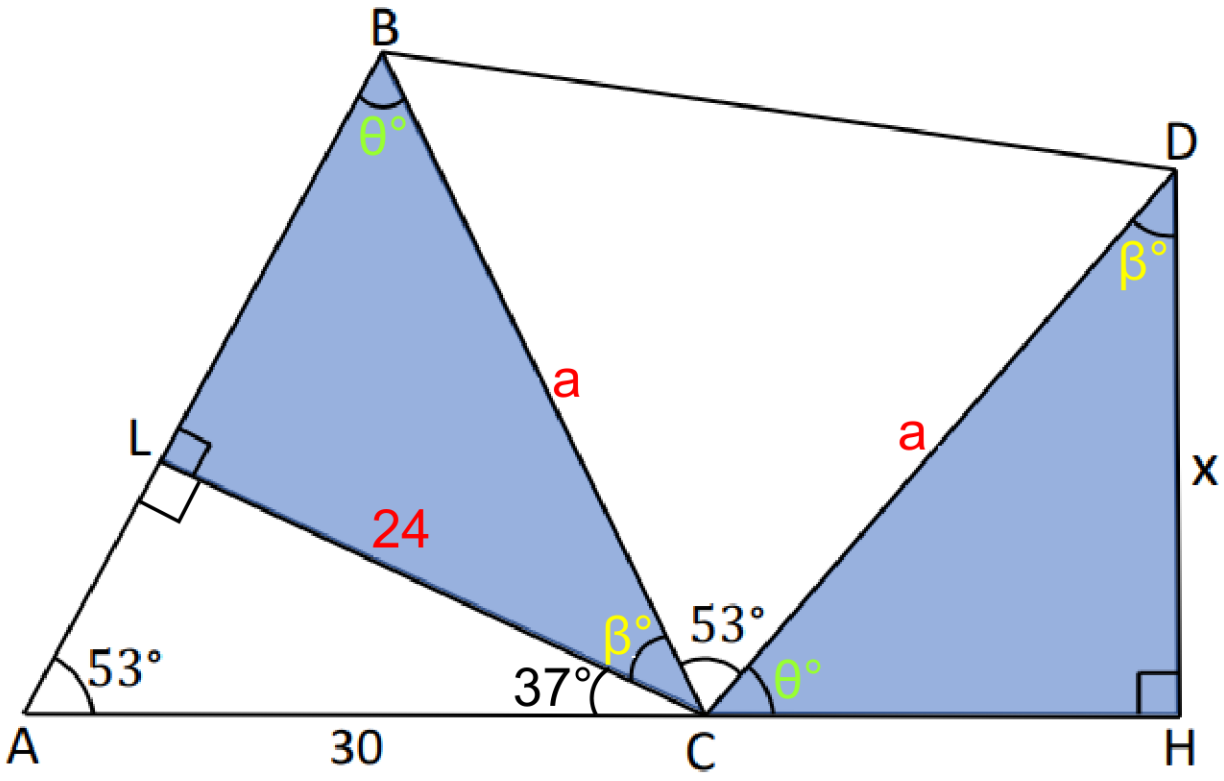

A) 12
B) 15
C) 18
D) 24
E) 30

## Resolución:

Se pide DH = x

Trazamos $\overline{CL} \perp \overline{AB}$ ( L en $\overline{AB}$ )

luego del ΔALC Notable( 37 y 53 ) →CL = 24.



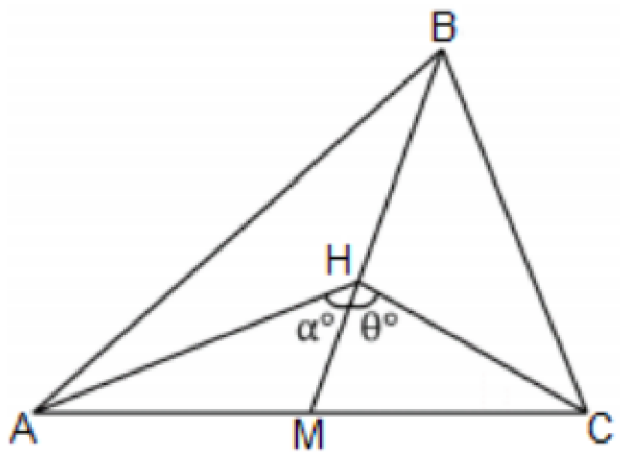

Sea m∡ABC = θ, entonces se deduce: m∡DCH = θ

Ahora se tiene: **ΔCLB ≅ ΔDHC ( A-L-A)**

∴ x = 24

# EJERCICIOS

05. En la figura AM=MC y θ>α. Si HC=5, HM=3, halle el número de valores enteros de AH.



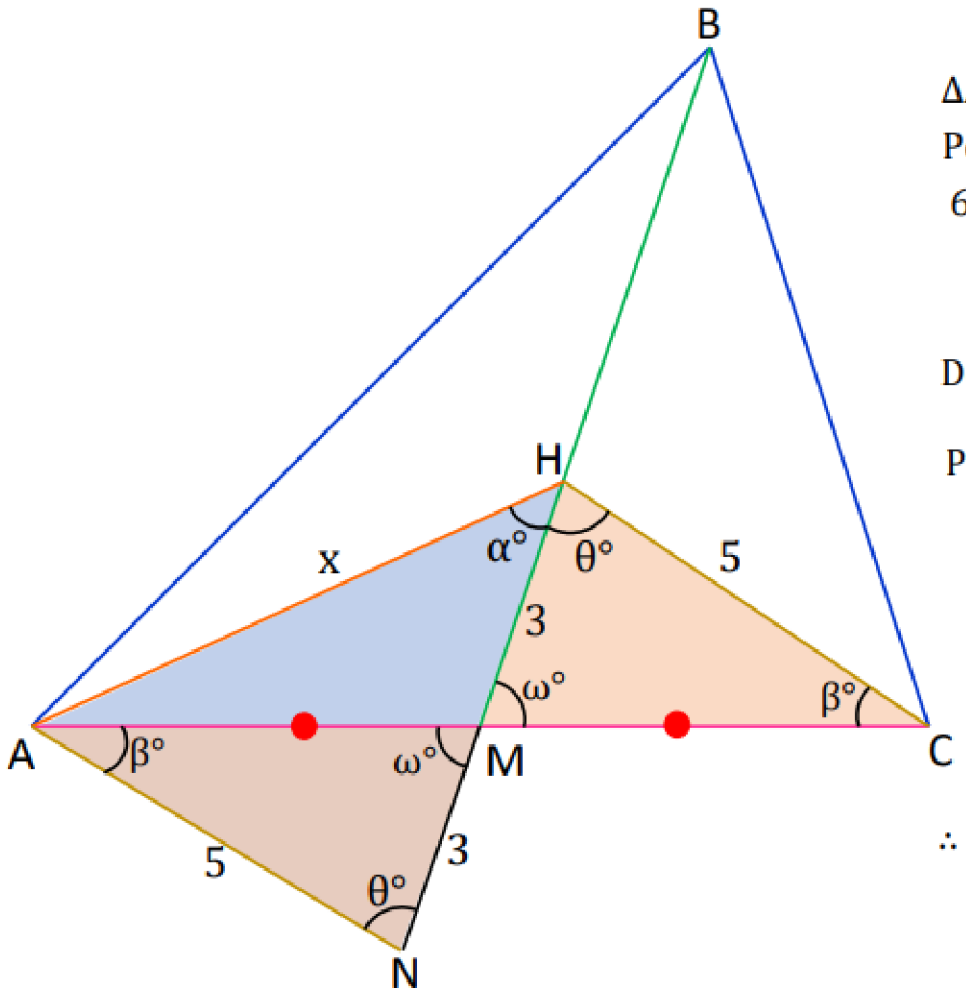

A) 7
B) 6
C) 5
D) 4
E) 5,5

## Resolución:

¿Cuántos valores enteros puede tomar x?

$\Delta AMN \cong \Delta CMH$ (ALA)

$\rightarrow MN = 3 \wedge AN = 5$




$\Delta AHN$

Por T. de existencia

$6 - 5 < x < 6 + 5$

$1 < x < 11$ ... (1)

Del dato:

$\theta > \alpha$

Por T. de correspondencia:

$x > 5$ ... (2)

De (1) y (2)

$\rightarrow 5 < x < 11$

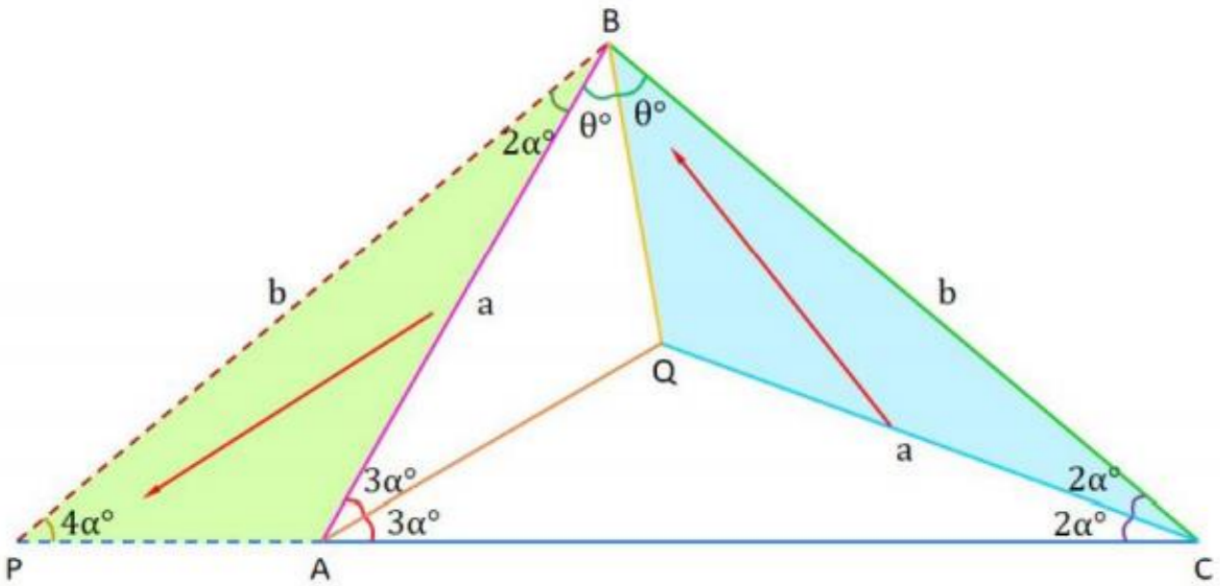
∴ x toma 5 valores enteros

# EJERCICIOS

06. En un triángulo ABC las bisectrices interiores se intersecan en Q; tal que AB=QC, m∠QAC=3α, m∠ACQ=2α Calcular m∠ABC.

A) 55
B) 65
C) 75
D) 80
E) 85

Resolución:




Datos: Q es incentro y AB=QC=a

Se pide: m∠ABC=x=2θ

Se ubica el punto P en la prolongación de $\overline{CA}$, tal que:

$$m\angle ABP = 2\alpha$$

Luego: $m\angle P = 4\alpha$ y $PB = BC = b$

Ahora se tiene:

$$\Delta BCQ \cong \Delta PBA \quad (L-A-L)$$

$$\rightarrow \theta = 4\alpha$$

Finalmente en el triángulo ABC:

$$6\alpha + 2\theta + 4\alpha = 180$$

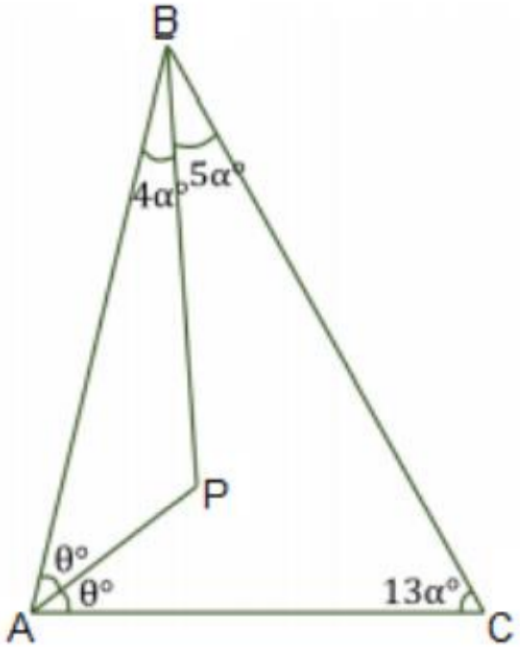
$$18\alpha = 180$$

$$\alpha = 10$$

$$\therefore x = 2\theta = 8\alpha = 80$$

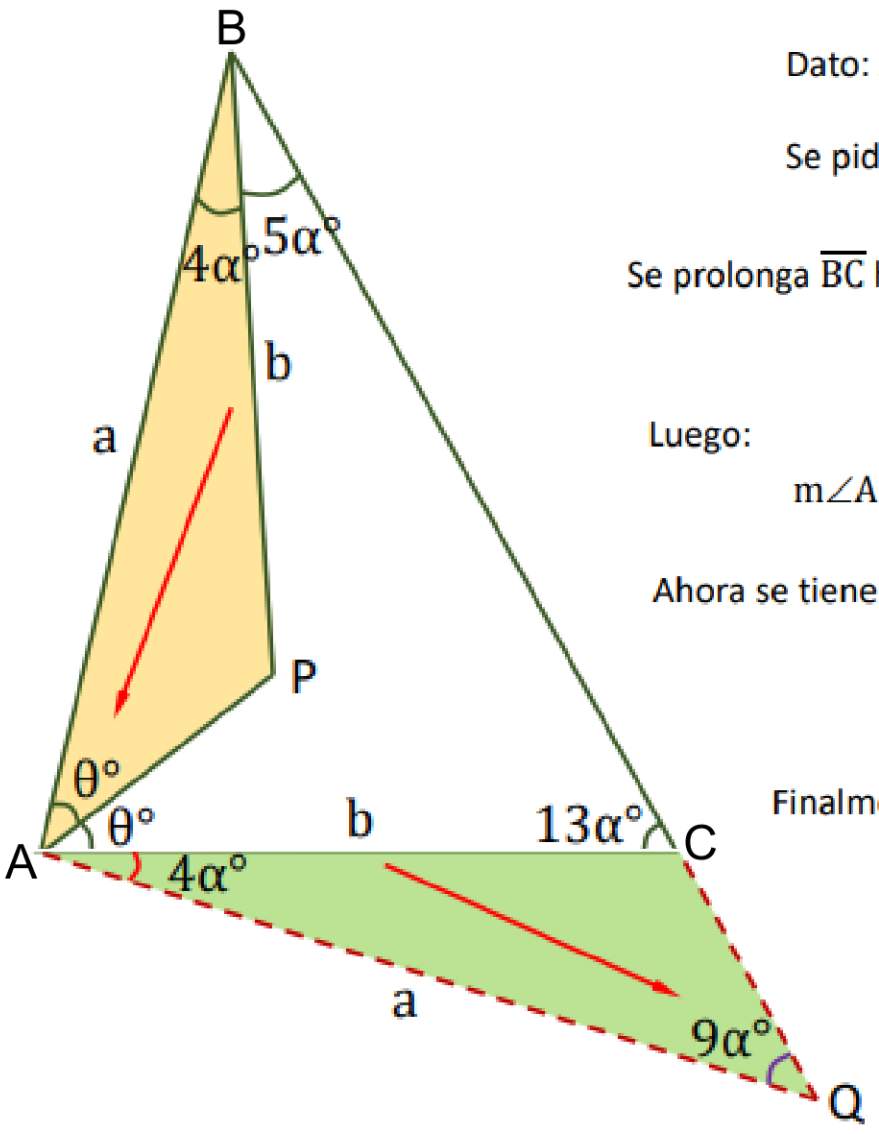
# EJERCICIOS

07. En el triángulo mostrado, BP=AC, calcule la m∠ABP=4α.




A) 45
B) 20
C) 30
D) 60
E) 18

Resolución:




Dato: $AC = BP = b$

Se pide: $m\angle ABP = x = 4\alpha$

Se prolonga $\overline{BC}$ hasta el punto Q, de modo que:

$$m\angle CAQ = 4\alpha$$

Luego:

$$m\angle AQC = 9\alpha \quad y \quad AB = AQ = a$$

Ahora se tiene:

$$\Delta ABP \cong \Delta QAC \quad (L - A - L)$$

$$\rightarrow \theta = 9\alpha$$

Finalmente en el triángulo ABC:

$$2\theta + 9\alpha + 13\alpha = 180$$

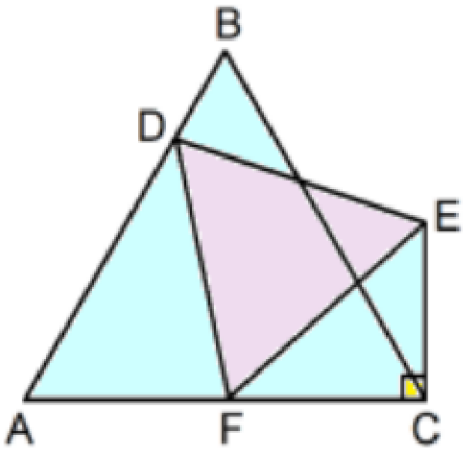
$$18\alpha$$

$$\rightarrow 40\alpha = 180$$

$$\therefore x = 4\alpha = 18$$

# EJERCICIOS

08. En el gráfico se muestran los triángulos equiláteros ABC y DEF. Si AF=6, calcular BD.




A) $2\sqrt{3}$
B) $3\sqrt{3}$
C) 2
D) 3
E) 4

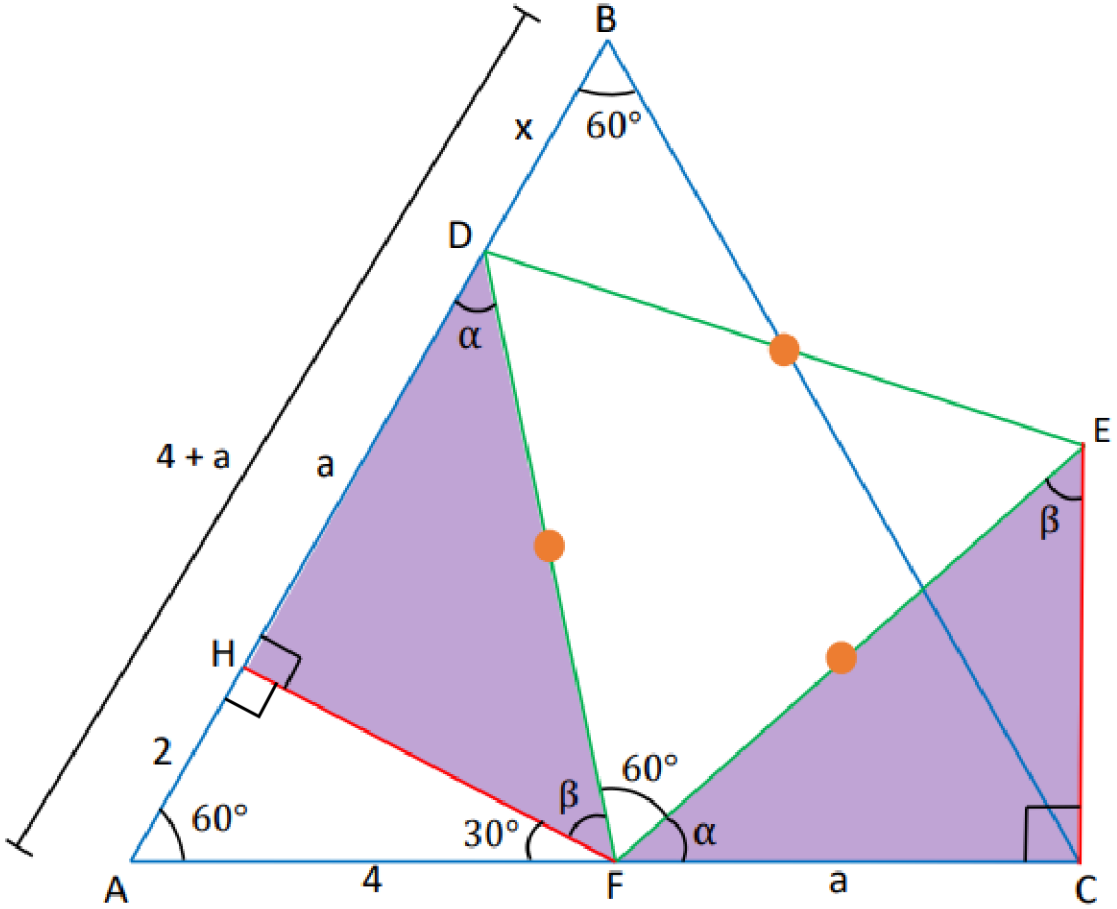
## Resolución:

Piden DB = x

Datos: ΔABC y ΔDFE equiláteros

Sea FC = a → AB = BC = AC = 4 +a

luego m∠ADF = m∠CFE = α




Entonces buscando congruencia se traza $\overline{FH} \perp \overline{AD}$

Notamos que ⊿DHF ≅ ⊿FCE (caso A-L-A)

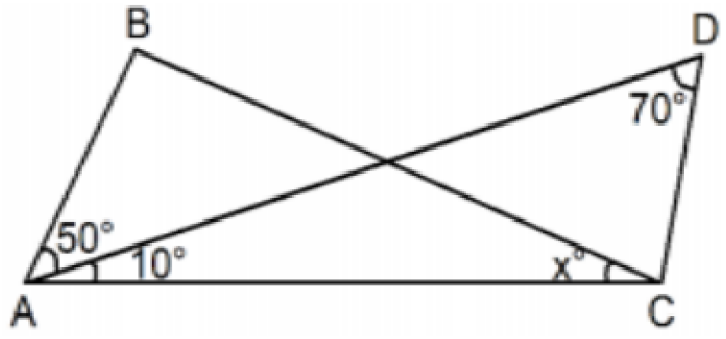
→ DH = FC = a

Por último: 4 + a = 2 + a + x

$\therefore x = 2$

# EJERCICIOS

09. Del gráfico calcular el valor de x, si AB=CD.




A) 5
B) 15
C) 9
D) 10
E) 20

Resolución:

Piden x

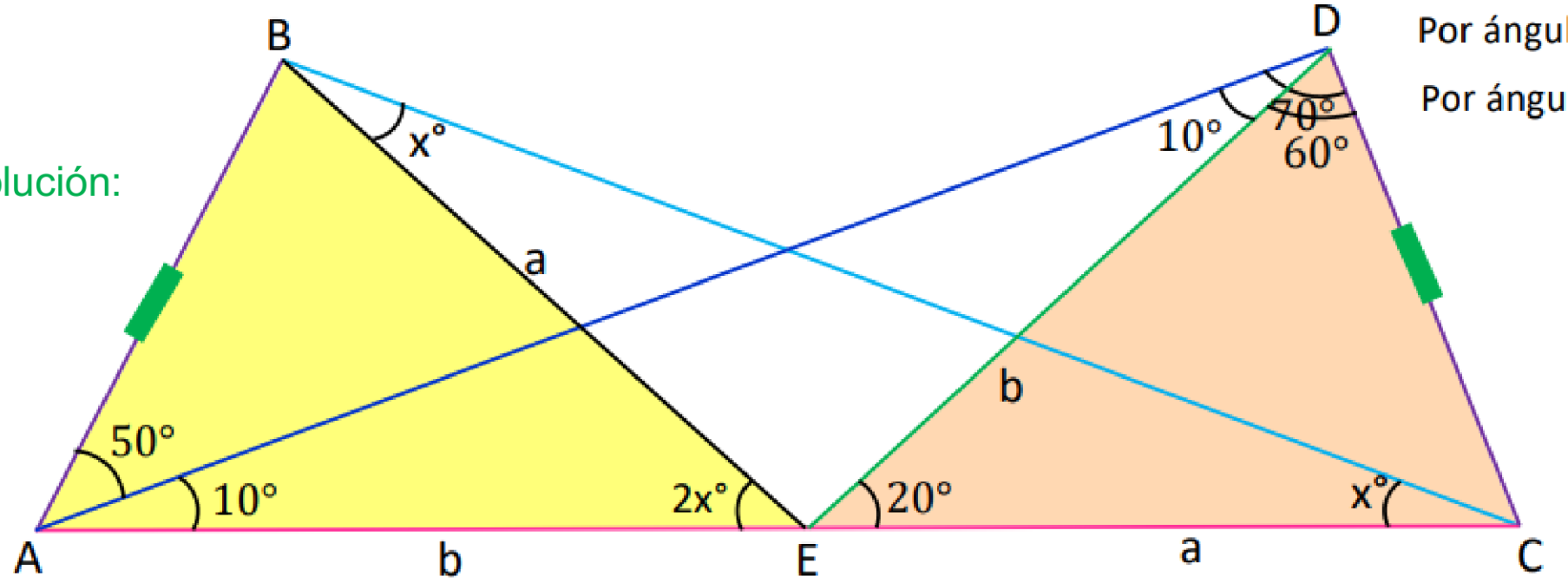
En el ΔADC se traza $\overline{DE}$ tal que m∠ADE = 10

AE = ED = b; m∠EDC = 60°

Notamos que ΔBAE ≅ ΔCDE (caso L-A-L)

→ BE = EC = a ; m∠BEA = m∠DEC

Luego ΔBEC es isósceles: m∠EBC = x




Por ángulo exterior m∠DEC = 20

Por ángulo exterior m∠BEA = 2x

→ 20 = 2x

$\therefore x = 10$

# EJERCICIOS

10. En el interior de un triángulo ABC (AB=BC), se ubica el punto P tal que BP=AC, m∠PBA=10 y m∠PBC=30. Calcular m∠PAB:

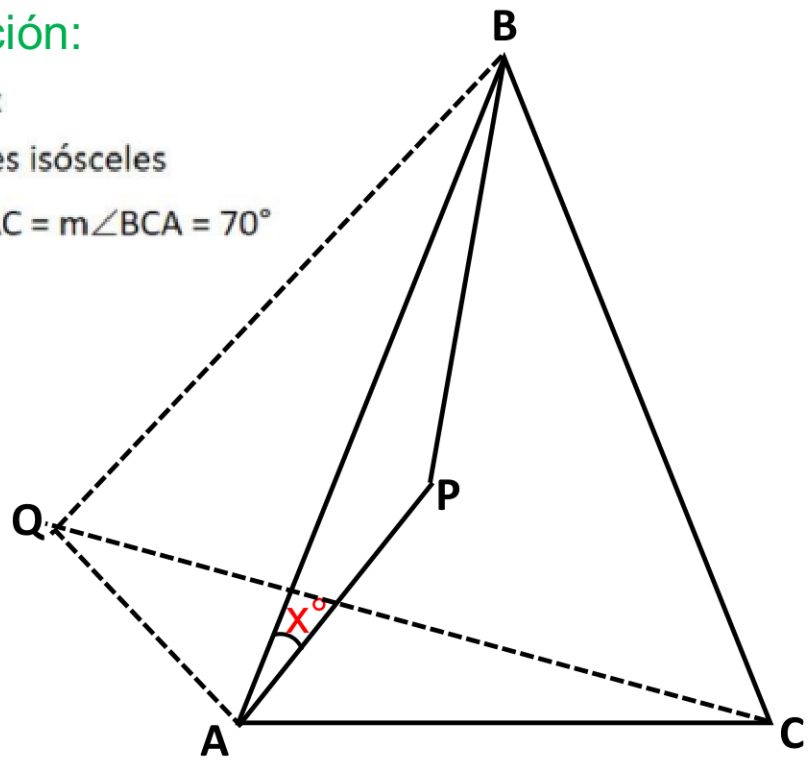
A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 30

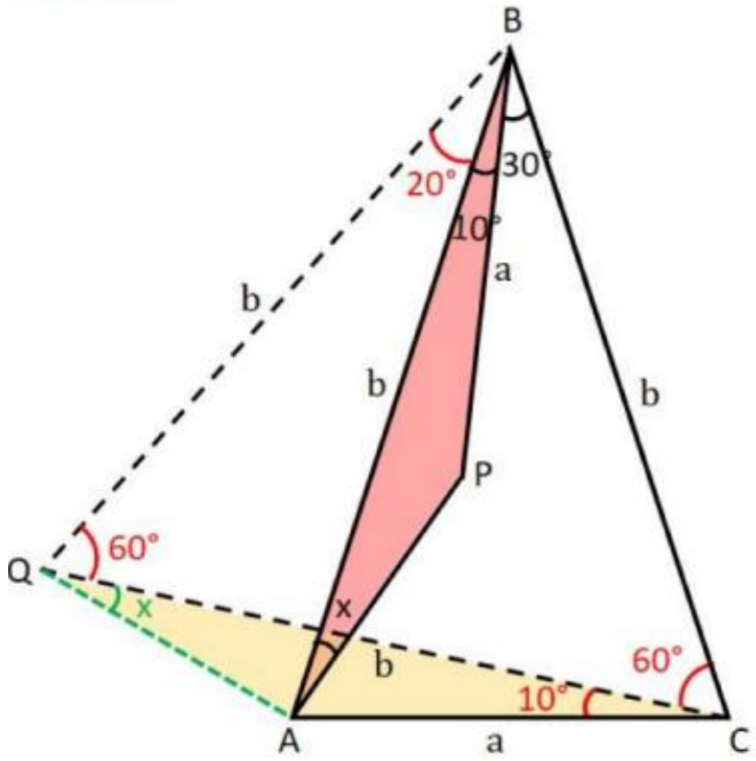
## Resolución:

Se pide x

El ΔABC es isósceles

⇨ m∠BAC = m∠BCA = 70°




Se construye el Δ equilátero QBC

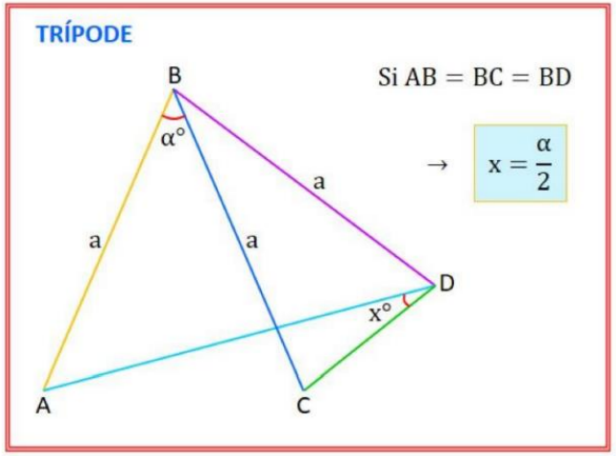
El ΔABQ es isósceles

ΔABP ≅ ΔQCA ... LAL

⇨ m∠AQC = x

⇨ 60°+ x = 80°

∴ x = 20°



# CLAVES

- **PARA EL ALUMNO:**

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 |
|---|---|---|---|---|
| B | B | C | E | A |
| **06** | **07** | **08** | **09** | **10** |
| C | B | B | D | 12 |

# FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS